KÜRESEL GEOMETRİ VE DENİZCİLİK

Ferit Öztürk

İÇİNDEKİLER

1. Küresel geometri ve denizcilik

Hiç şüphesiz bir denizcinin geometrik alemi bir küredir çünkü dünya yüzeyi yaklaşık olarak bir küredir. Her ne kadar İstanbul denizlerini düzlemsel modellemek bize yolumuzu kaybettirmese de, açık denizlere çıktıkça ve uzaklıklar arttıkça, düzlem geometrisini kullanmak hesaplarda gittikçe büyüyen hatalara yol açar. Bu makalenin amacı, küresel geometriyi tanıtmak, temel matematik üzerine basitçe inşa etmek, bu geometride trigonometriyi kurmak, nasıl kullanıldığını betimleyecek kimi örnekler sunmaktır. Bu makaleyi okumak için lise düzeyinde geometri bilgisi yeterlidir.

2. Küresel geometrinin inşası

2.1. **Küresel geometrinin analitik modeli.** Çok iyi bildiğimiz üç boyutlu Öklit uzayında ($\mathbb{R}^3$) başnoktaya[1] (O) uzaklığı sabit olan noktaların kümesine *küre* diyoruz. Bu kürenin noktalarına küresel geometrinin **nokta**ları denecek. Küre üzerinde, $\mathbb{R}^3$'ten gelen bir uzunluk kavramı var. Küre üzerinde kalmak koşuluyla iki

[1] orijin

nokta arasındaki en kısa yol, bu iki nokta ve başnoktadan geçen düzlemin küreyle kesişiminden elde edilen çemberin kısa yayıdır. Bu çokça bilinen bir gerçek ancak matematiksel ispatı o kadar kolay değil. Başnoktayı içeren düzlemlerle kürenin kesişimindeki bu gibi çemberlere *büyük çember* denir. Küre üzerinde inşa ettiğimiz geometrinin **doğru**ları büyük çemberler olacak.

Şu andan başlayarak küre dediğimizde 1 yarıçaplı bir küreyi kastediyoruz.

Bu doğrular (büyük çemberler) ve noktaların küre üzerinde birbirleriyle ilişkisi bize küresel geometriyi verir. Bu geometri alıştığımız düzlem (Öklit) geometrisinden çok farklıdır. Örneğin, düzlem geometrisinin birinci beliti[2] şöyle der: Düzlemde birbirinden farklı iki noktadan bir ve yalnız bir doğru geçer. Küresel geometride bir nokta çiftinden mutlaka bir doğru (büyük çember) geçer geçmesine, ancak öyle nokta çiftleri vardır ki birden çok doğrunun üzerinde yer alır. Bunu görmeye çalışalım: Küre üzerinde alınan iki nokta (A ve B) ile O üç boyutta aynı doğru üzerinde yer almıyorsa, 3 noktadan bir ve yalnız bir düzlem geçeceğinden bu düzlem A ve B'den geçen bir ve yalnız bir büyük çember belirtir. Eğer A, B ve O doğrusalsa bu 3 nokta sonsuz tane düzlem, küre üzerinde de sonsuz tane büyük çember anlatır.

Düzlemsel ve küresel geometri arasındaki en önemli fark paralel doğrulara ilişkindir. Paralel doğrular, Öklit-dışı geometrilerin var olabileceğine ilişkin şüphelerin tarihsel olarak hedefi olmuştur. Düzlem geometrisinin beşinci belitine göre,

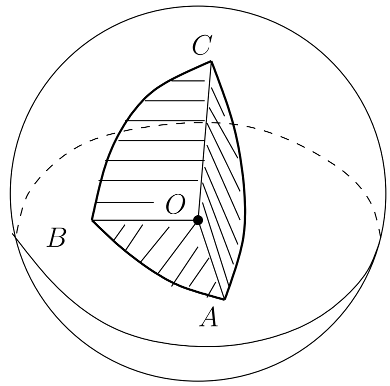
Bir doğruya dışındaki bir noktadan bir tek paralel doğru çizilebilir.

Bu cümlenin bir *gerçek* değil bir kabul olmasının nedeni, bu iddianin doğruluğunu *sınamanın* olası olmamasıdır. Bu ünlü beşinci beliti dikkatle okuyacak olursanız, birinci belitten farklı olarak, geçerliliğini sınamak için belirsiz bir süre (sonsuza kadar?) bu doğrular boyunca gidip kesişip kesişmediklerine dikkat etmek gerekeceğini göreceğiz. Yaşadığımız sınırlı mekanda böyle bir şey deneyimlemiyoruz. İşte bu gözlem insan uygarlığını beşinci belit konusunda sürekli rahatsız etti ve beşinci belitin geçerli olmadığı geometriler arandı. Şimdi görüyoruz ki beşinci belit küresel geometride geçerli değildir; zira küresel geometride paralel doğrular yoktur. Her farklı doğru çifti iki noktada kesişir çünkü başnoktadan geçen ve birbirinden farklı her düzlem çifti, başnoktadan geçen bir doğruda kesişir. Bu doğru da küreyle iki noktada kesişir.

Belitlerin üzerinden teker teker geçmek yerine şunu söyleyip bitirebiliriz: düzlem geometrisi, geçerli olduğu kabul edilen beş tane ilk cümleyle, belitle başlar. Küresel geometride bunların hiçbirisi geçerli değildir.

2.2. **Küresel üçgen.** *Küresel üçgen*, küre üzerinde üç nokta ve bu noktaları birleştiren üç büyük çember yayından (doğru parçası) oluşur. Tüm büyük çemberler 1 yarıçaplı olduğundan, büyük çemberlerin uzunluğunu 360° ya da 2π olarak ifade edebiliriz. Dolayısıyla büyük çemberler üzerindeki yayların uzunluğunu derece ya da radyan olarak anlatabiliriz. Her bir büyük çember, başnoktayı içeren bir düzlemle kürenin kesişimi olduğundan, küresel üçgen aynı zamanda başnoktadan geçen üç düzlemin küreyle kesişimi olarak da görülebilir (Şekil 1). Küresel üçgenin iki kenarı a ve b, bunların buluştukları köşe C, bunları oluşturan düzlemler $\mathfrak{D}_a$ ve $\mathfrak{D}_b$ olsun. a ve b arasındaki açıyı, C noktasındaki teğetleri arasındaki açı olarak tanımlıyoruz. a kenarına teğet, $\mathfrak{D}_a$ düzleminin içinde bir yön anlatır. Bu yön küreye teğet olduğundan,

[2] aksiyom



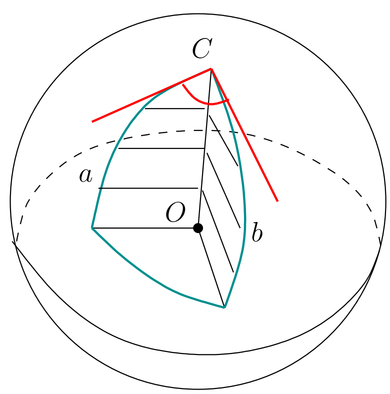
Şekil 1. ABC küresel üçgeni; kenarlar büyük çember

$\mathfrak{D}_a$ ile $\mathfrak{D}_b$'nin kesiştiği doğruya da diktir. Dolayısıyla $\mathfrak{D}_a$ ile $\mathfrak{D}_b$'nin arasındaki açı, a ile b arasındaki açıya eşittir (Şekil 2). Bu gözlem önemli çünkü küresel üçgenlerin iç açılarına ilişkin her bulgu bize 3 boyutta başnoktayı içeren 3 düzlemin konumlarına ilişkin bilgi verecek. Küresel üçgenin düzlemlerle inşası bize hemen kenar uzunlukları hakkında bir bilgi veriyor: Küresel üçgenlerin kenarları en fazla π radyan olabilir. Her bir iç açı da 180°'den küçük olmak zorundadır. Bu yüzden küresel üçgenin iç açıları toplamı 540°'den küçüktür. En az toplam da 180° olmalıdır.

Küresel üçgenin kenar uzunluklarına gelince, başnoktadan geçen farklı iki düzlemin kürede belirttiği büyük çember yayı çiftlerinin uzunluk toplamı en fazla 2π olacaktır; üçüncü düzlemin eklenmesiyle getirilen üçüncü kenar bu toplamı küçültür. Dolayısıyla bir küresel üçgenin kenar uzunlukları toplamı en fazla 2π olur.

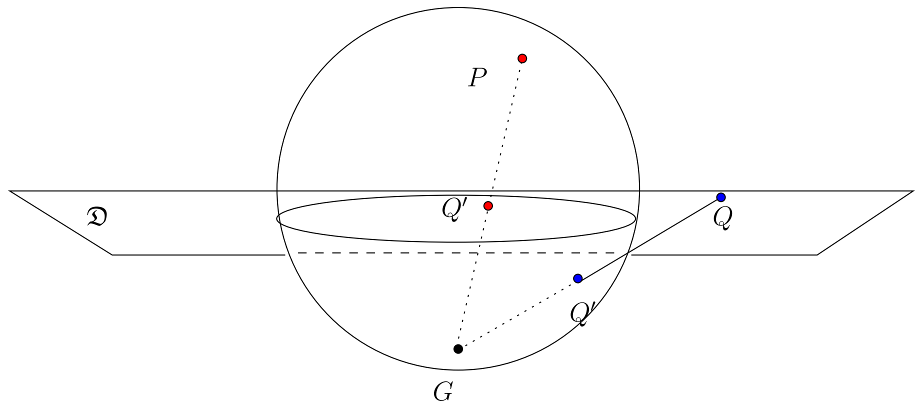
3. Stereografik İzdüşüm

Küresel geometride hesap yapmamızı kolaylaştıracak temel bir gereç, küreden düzleme izdüşümlerdir. Biz burada en basit izdüşümlerden birini kullanacağız: stereografik izdüşüm. Bu izdüşüm, *ekvator* düzlemine ($\mathfrak{D}$) *güney kutbundan* (G) geçen doğrular aracılığıyla tanımlanır. Küre üzerinde bir P noktasının stereografik



Şekil 2. Küresel üçgende kenarlar arasındaki açı

izdüşümü, GP doğrusunun $\mathfrak{D}$ düzlemiyle kesiştiği noktadır. G'nin görüntüsü yoktur. *Kuzey kutbu*nun (K) görüntüsüyse O noktasıdır. Kuzey yarıküredeki noktalar birim çember içine, ekvator birim çembere, güney yarıküredeki noktalar birim çemberin dışına gönderilir (Şekil 3).

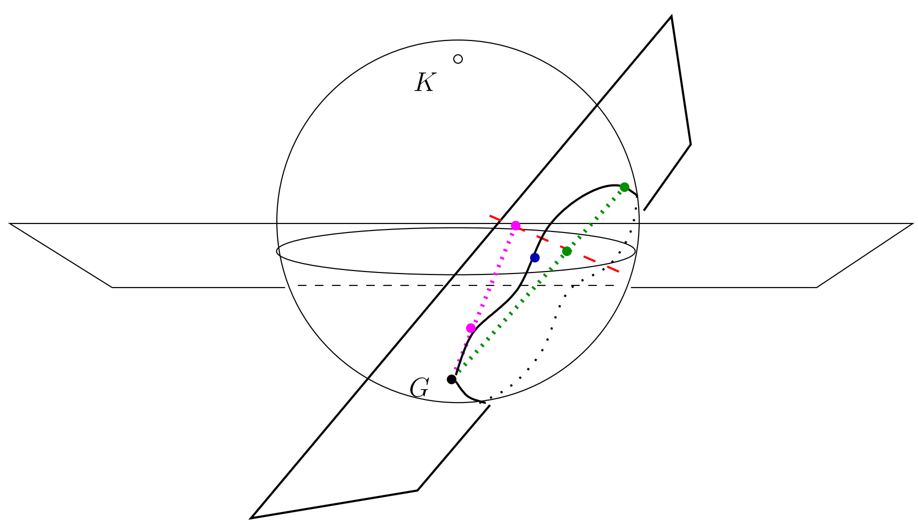


Şekil 3. Stereografik izdüşüm; ekvator düzleminin alt tarafından bakıyoruz

Basit bir hesapla bu izdüşümün birim küreden ekvator düzlemine analitik olarak şöyle verildiği bulunabilir:

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z} \right).$$

3.1. **Stereografik izdüşüm, meridyenleri doğrulara götürür.** Daha da fazlası doğrudur. Stereografik izdüşüm, G'den geçen her düzlemsel eğriyi bir doğruya götürür. Bunu Şekil 4'te açıkça görebiliriz:



Şekil 4. Stereografik izdüşüm, G'den geçen her düzlemsel eğriyi bir doğruya götürür

3.2. **Stereografik izdüşüm, küre üzerinde G ve K merkezli çemberleri çemberlere götürür.** Bu da Şekil 4'e benzer bir resimle kolayca görülebilir.

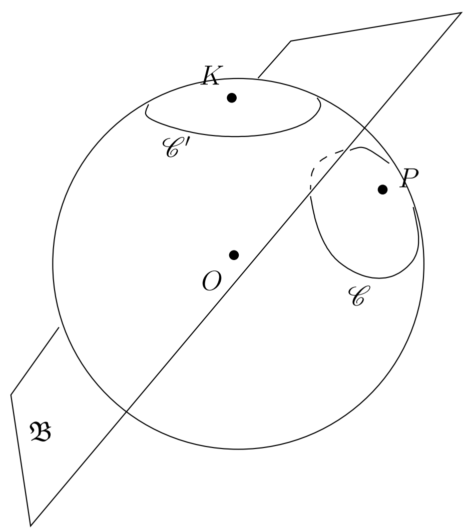
3.3. **Stereografik izdüşüm, K'deki açıları korur.** Bununla şunu demek istiyoruz: küre üzerinde ve K'den geçen iki eğrinin K'de teğetlerinin yaptığı açı, eğrilerin görüntülerinin O'da yaptığı açıya eşittir. Bunu görmenin en kolay yolu, izdüşümün K'de türevini hesaplamaktır. $(u, v, 0)$, K noktasında bir vektör olmak üzere:

$$(u, v, 0) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{1+z} & 0 & \frac{-x}{(1+z)^2} \\ 0 & \frac{1}{1+z} & \frac{-y}{(1+z)^2} \end{pmatrix}_{(0,0,1)} \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

K'de küreye teğet $(u, v, 0)$ ve $(u', v', 0)$ vektörleri arasındaki açı, (u, v) ve (u', v') vektörleri arasındaki açıya eşit olduğundan stereografik izdüşüm $K'de$ açıları koruyacaktır.

3.4. **Stereografik izdüşüm, küre üzerinde çemberleri çemberlere ya da doğrulara götürür.** G'den geçen her çember için görüntünün bir doğru olduğunu yukarıda görmüştük. Küre üzerinde G'den geçmeyen (düzlemsel) bir çemberin görüntüsüyse bir çemberdir. Bu tamamen sentetik geometrik yollarla ispatlanabilir. Daha kolay ve daha derin bir ispat ise karmaşık geometri[3] kullanılarak yapılabilir:

Öncelikle, K merkezli herhangi bir çember bir çembere gider (3.2). P, küre üzerinde herhangi bir nokta; $\mathscr{C}$, G'den uzak, P merkezli bir çember, $\mathfrak{B}$ ise P ve K'ye eşit uzaklıktaki noktalardan oluşmuş düzlem olsun. O, $\mathfrak{B}$ düzlemi üzerindedir. $\mathfrak{B}$'ye göre kürenin yansıması, P'yi K'ye, $\mathscr{C}$'yi de K merkezli bir çembere ($\mathscr{C}'$) götürür (Şekil 5). Kürenin böyle bir yansıması, stereografik izdüşüm altında ekvator düzlemi $\mathfrak{D}$



Şekil 5. Kürede yansıma

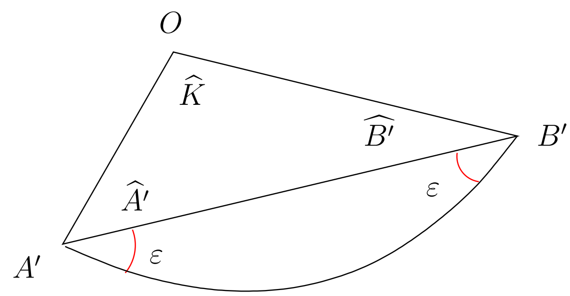
üzerinde bir çembere göre yansımaya karşılık gelir (buna *evirtim* denir). Her evirtim çemberleri çemberlere gönderdiğinden $\mathscr{C}$'nin izdüşüm altında görüntüsü, önce $\mathfrak{B}$'ye göre yansıma, sonra izdüşüm ve sonra evirtimle bulunabilir; ki sonuç bir çemberdir.

[3] İng. complex geometry

Tüm bu tartışma açılar için de geçerlidir. Şimdi K'de açıların korunduğunu (3.3) ve evirtimlerin de açıları koruduğunu kullanmak gerekecek[4].

4. Cesaro'nun üçgenleri

4.1. **Cesaro üçgeni.** Küresel geometride bir üçgeni incelemek için bu üçgeni stereografik izdüşümle düzleme indirip, görüntünün düzlemdeki özelliklerinden üçgene ilişkin bilgiler çıkaracağız. Bunun için öncelikle küresel üçgenin bir köşesini kuzey kutbunda alacağız. Bu hesapları bozmayacağı gibi basitleştirecek. KAB böyle bir üçgen olsun. İzdüşüm sonucunda elde edilen $OA'B'$ eğrisinin bir köşesi O'da olacak. KA ve KB birer meridyen parçası olduğu için, yani G'den geçen büyük çemberler olduğu için, OA ve OB kenarları doğru parçaları olacak (3.1). AB eğrisiyse bir çember yayı olacak.



Şekil 6. Küresel üçgenin izdüşümü ve küresel fazlalık

Stereografik izdüşüm K'deki açıları koruduğundan $\widehat{O} = \widehat{K}$ olur (3.3). Ayrıca $\widehat{A} - \widehat{A'}$ farkı ile $\widehat{B} - \widehat{B'}$ farkı birbirine eşittir. Bu farkı E ile gösterelim (Şekil 6). Dolayısıyla açılara ilişkin şu eşitliklerimiz var:

$$\widehat{O} = \widehat{K}, \;\; \widehat{A'} = \widehat{A} - E, \;\; \widehat{B'} = \widehat{B} - E, \;\; 180 = \widehat{O} + \widehat{A'} + \widehat{B'} = \widehat{K} + \widehat{A} + \widehat{B} - 2E.$$

İç açılar toplamının 180 dereceden farkı olan bu $2E$ fazlalığına *küresel fazlalık*[5] denir.

Şimdi, KA büyük çemberini içine alan düzlemde Şekil 7'ye bakalım. $\widehat{KAG}$ ve $\widehat{GOA'}$ açıları dik olduğundan KAG ve GOA' üçgenleri benzerdir. Aynı resim A ve A' yerine B ve B' koyarak da doğru olduğundan üçgen benzerlikleri

$$GA \cdot GA' = GK \cdot GO = GB \cdot GB'$$

eşitliklerini verir. Eşitliğin sol ve sağ tarafı, GAB ve $GB'A'$ üçgenlerinin benzer olduğunu ve aşağıdaki şekilde α ve β ile gösterilen açıların gerçekten birbirine eşit olduğunu söyler.

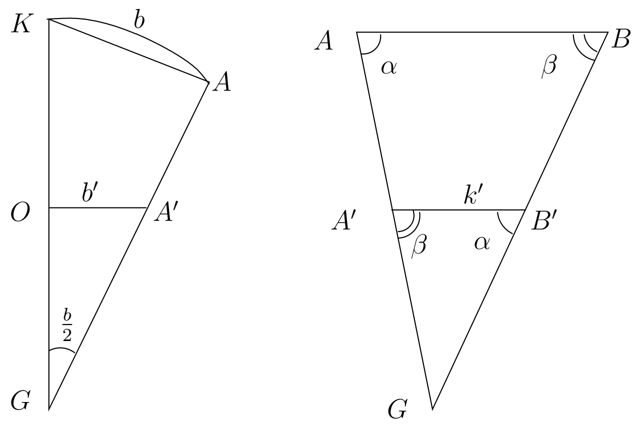
KAB küresel üçgeninin KB, KA ve AB kenarlarının radyan ölçülerine sırasıyla a, b ve k diyelim. Kürenin çapının 1 olduğunu hatırlayarak şu eşitlikleri çıkarırız:

$$a' = \tan\frac{a}{2}, \;\; b' = \tan\frac{b}{2}, \;\; k' = AB \cdot \frac{GB'}{GA} = 2\sin\frac{k}{2} \cdot \frac{1/\cos\frac{a}{2}}{2\cos\frac{b}{2}} = \frac{\sin\frac{k}{2}}{\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2}}.$$

---

[4] Evirtimlerin açıları ve çemberleri koruduğu, karmaşık geometride kolayca ispatlanabilecek bir teoremdir.

[5] İng. spherical excess

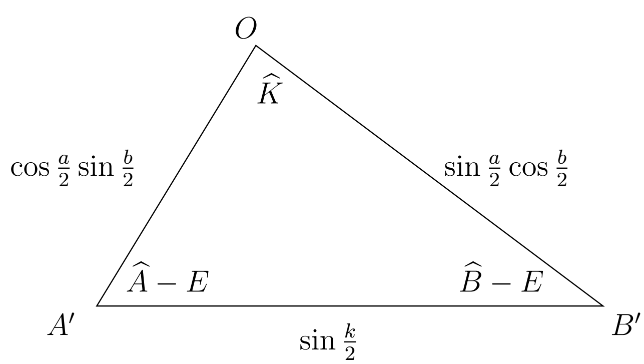


Şekil 7. (a) KAG düzleminde resim; (b) ABG düzleminde resim

Yukarıdaki son eşitliklerde GA ve GB' uzunluklarını Şekil 7(a) aracılığıyla bulduk. AB uzunluğunu ise OAB ikizkenar üçgeninde kosinüs teoremi yardımıyla bulduk:

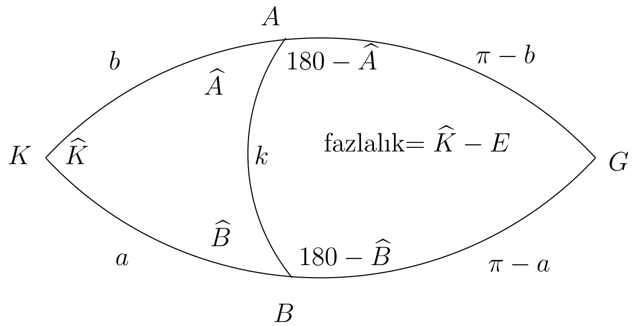
$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \widehat{AOB} = 2 - 2\cos k = 4 \sin^2 \frac{k}{2}.$$

Böylelikle KAB üçgeninin stereografik izdüşümü $OA'B'$ üçgeninin kenar uzunluklarını ve açılarını bulduk. k' ifadesinin paydasından kurtulmak için tüm kenar uzunluklarını $\cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2}$ çarparak oluşturulan aşağıdaki üçgene *KAB üçgeninin K köşesine göre Cesaro üçgeni* denir (Şekil 8). Bu üçgen, KAB küresel üçgenimizin tüm bilgisini taşımaktadır. Bir küresel üçgene karşılık gelen Cesaro üçgeni bulunduğunda, tüm hesaplar düzlemde bu üçgende yapılabilir.



Şekil 8. KAB üçgeninin K köşesine göre Cesaro üçgeni

4.2. **Cesaro komşu üçgeni.** Küresel üçgen KAB'yi oluşturan iki büyük çember KA ve KB'yi düşünün. Bunlar K noktasından başka, bir noktada daha, güney kutbu G'de kesişirler. GAB küresel üçgeninin A noktasına göre Cesaro üçgenini çizmeye çalışacağız (Şekil 9). Öncelikle $\widehat{G}$ açısı $\widehat{K}$ açısına eşittir. Ayrıca, $\widehat{GAB} =$



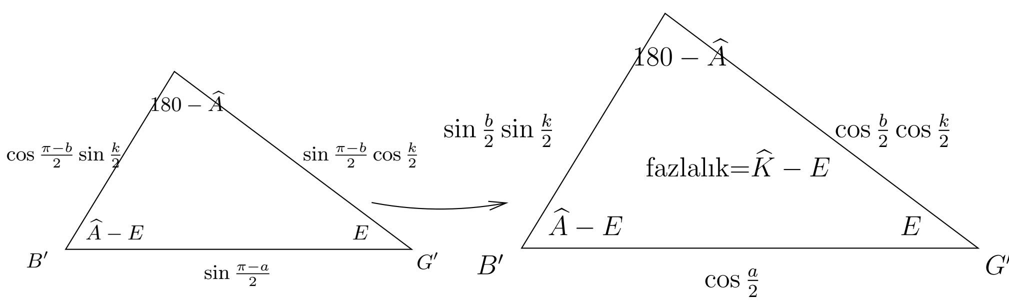
ŞEKİL 9. KAB üçgeni ve komşusu GAB

$180-\widehat{A}$ ve $\widehat{GBA}=180-\widehat{B}$ olduğunu görüyoruz. Küresel fazlalık da

$$\widehat{G}+\widehat{GAB}+\widehat{GBA}-180=\widehat{K}-\widehat{A}-\widehat{B}+180=2\widehat{K}-2E=2(\widehat{K}-E)$$

eşitliği sayesinde $\widehat{K}-E$ bulunuyor. Küresel üçgende kenar uzunlukları da radyan cinsinden $GA=\pi-KA=\pi-b$ ve $GB=\pi-KB=\pi-a$ olacak. Böylece GAB küresel üçgeninin A köşesine göre Cesaro üçgenini çizebiliriz. Şekil 10'da ilk önce GAB'nin Cesaro üçgenini Şekil 8'deki gibi çiziyoruz. Burada B' ve G' noktaları, A'ya göre stereografik izdüşüm altında B ve G'nin görüntüleridir. Şekilde ifadeleri basitleştirerek Şekil 10'da sağdaki üçgeni elde ediyoruz. Bu üçgene, KAB üçgeninin A köşesine göre *Cesaro komşu üçgeni* diyeceğiz.

Cesaro komşu üçgenini elde etmedeki amaç şudur: küresel fazlalık (E) bu üçgeninin çokluklarından birinde yalnız başına göründüğünden, hesaplarımızda E'yi hesaplamadan onu yokedebiliyoruz. Buna ilişkin bir örneği bölüm 5.2'de göreceğiz.

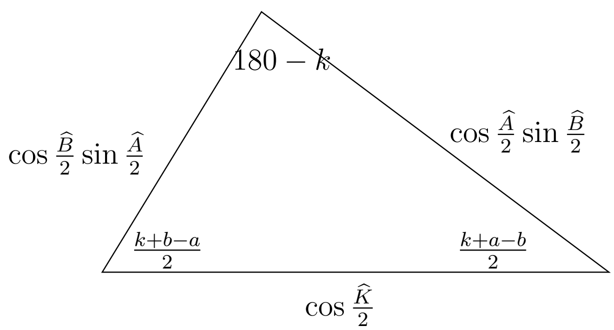


ŞEKİL 10. KAB üçgeninin A köşesine göre Cesaro *komşu* üçgeni (sağda)

4.3. **Kutupsal üçgen.** KAB küresel üçgeninden, $K'A'B'$ adlı yeni bir küresel üçgen elde edeceğiz. K', A', B' noktalarını

- OK' doğrusu OAB düzlemine dik ve düzleme göre OK tarafında;
- OA' doğrusu OKA düzlemine dik ve düzleme göre OB tarafında;
- OB' doğrusu OKA düzlemine dik ve düzleme göre OA tarafında olacak biçimde tanımlıyoruz.

Dikkatli bakarsak K' noktasının OAB düzlemine göre bir *kutup* olduğunu görürüz. Bu yüzden $K'A'B'$ küresel üçgenine KAB *küresel üçgeninin kutuplar üçgeni* denir. Aynı anda, KAB de $K'A'B'$ üçgeninin kutuplar üçgenidir. Dolayısıyla radyan cinsinden k uzunluğu OA ve OB vektörleri arasındaki açı olduğundan, $OK'B'$ ve $OK'A'$ düzlemleri arasındaki açıyla toplandığında π çıkar yani $K' = \pi - k$ olur. Benzer biçimde $A' = \pi - a$ ve $B' = \pi - b$ olacaktır. Küresel fazlalık ise $K' + A' + B' - \pi$ hesaplanarak $2\pi - k - a - b$ bulunur. Sonuç olarak, kutuplar üçgenine karşılık gelen Cesaro üçgeni Şekil 11'deki gibi olur.



Şekil 11. KAB üçgeninin *kutuplar üçgenine* ait Cesaro üçgeni

5. Üç çokluğu bilinen bir küresel üçgende dördüncüyü bulma

Bir KAB küresel üçgeninin üç kenar uzunluğu verildiğinde bir açısını nasıl bulabiliriz? Üçgenin bir kenar uzunluğu ve iki açısı verildiğinde diğer kenar uzunluklarını nasıl bulabiliriz? Bu soruları yanıtlamanın en kolay yolu herhalde karşılık gelen Cesaro üçgenine geçerek hesapları orada yapmaktır (Şekil 8). Bu konuda birkaç örnek verelim.

5.1. **Üç kenardan bir açı.** KAB küresel üçgeninde a, b ve k kenar uzunlukları radyan cinsinden verilmiş olsun. Şekil 8'de $\widehat{K}$ açısını bulmak için kosinüs teoremini uygulamak yeterli olacak:

$$\begin{aligned}
A'B'^2 = \sin^2\tfrac{k}{2} &= \tfrac{1}{2} - \cos k \\
&= a'^2 + b'^2 - 2a'b'\cos\widehat{K} \\
&= (\sin\tfrac{a}{2}\cos\tfrac{b}{2})^2 + (\cos\tfrac{a}{2}\sin\tfrac{b}{2})^2 - 2(\sin\tfrac{a}{2}\cos\tfrac{b}{2})(\cos\tfrac{a}{2}\sin\tfrac{b}{2})\cos\widehat{K} \\
&= (\tfrac{1-\cos a}{2}\tfrac{1+\cos b}{2}) + (\tfrac{1+\cos a}{2}\tfrac{1-\cos b}{2}) - \sin a\cos b\cos\widehat{K} \\
&= \tfrac{1}{2}(1 - \cos a\cos b) - \sin a\sin b\cos\widehat{K}.
\end{aligned}$$

Buradan, $\cos\widehat{K}$ için, bilinenler cinsinden şunu yazabiliriz:

$$\boxed{\cos k = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\widehat{K}}$$

5.2. **İki kenar, bir karşı açıdan diğer karşı açı.** KAB küresel üçgeninde k, a kenar uzunlukları ve $\widehat{K}$ açısı verilmişken $\widehat{A}$ açısını bulmak istiyoruz. Önce KAB'nin A'ya göre Cesaro komşu üçgeninde (Şekil 10) sinüs teoremini kullanarak

$$\frac{\cos\frac{a}{2}}{\sin\widehat{A}} = \frac{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{k}{2}}{\sin E}$$

ve sonra KAB'nin B'ye göre Cesaro komşu üçgeninde sinüs teoremini kullanarak

$$\frac{\cos\frac{b}{2}}{\sin\widehat{B}} = \frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{k}{2}}{\sin E}$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu ikisinden istediğimiz eşitliği çıkarırız:

$$\boxed{\frac{\sin a}{\sin\widehat{A}} = \frac{\sin b}{\sin\widehat{B}}}$$

5.3. **Üç açıdan bir kenar.** KAB küresel üçgeninde $\widehat{K}$, $\widehat{A}$ ve $\widehat{B}$ açıları radyan cinsinden verilmiş olsun. Bir kenarı - diyelim ki k - bulmak için Şekil 11'deki kutuplar üçgeninin Cesaro üçgenine başvurabiliriz. Bu üçgende, k değerini bulmak için, bölüm 5.1'dekine benzer bir biçimde kosinüs teoremini uygulamak yeterli olacak. Sonuçta şu eşitliği bulacağız:

$$\boxed{\cos\widehat{K} = -\cos\widehat{A}\cos\widehat{B} + \sin\widehat{A}\sin\widehat{B}\cos k}$$

6. Denizcilikte örnekler

Bu bölümdeki denizcilik hesapları için dünya yüzeyini bir küre olarak kabul ediyoruz.

6.1. **İki nokta arasındaki uzaklık.** Boğaz'ın Marmara çıkışından (N41°00′00″, E29°00′00″) Marmara adasına (Marmara kasabası: N40°35′00″, E27°33′00″) gidiş dönüş bir yarışın toplam küresel parkur uzunluğu ne kadardır?

İlk nokta B ikincisi M olsun. Öncelikle koordinat bilgilerini ondalık ifadeyle derece ya da radyan birimlerine çevirmek gerekecek:

$$M: \quad 40°35'00'' = 40 + 35/60 = 40,583°; \qquad 27°33'00'' = 27 + 33/60 = 27,55°.$$

Kuzey kutbunu K ile gösterelim. İstenen uzunluk KBM üçgeninde k uzunluğudur. m ve b uzunlukları ve $\widehat{K}$ de bilinmektedir. Bu üçgen için yukarıda bulduğumuz birinci eşitliği kullanırsak (bölüm 5.1)

$$\begin{aligned}
\cos k &= \cos m\cos b + \sin m\sin b\cos\widehat{K}\\
&= \cos(90-40,583)\cos(90-41) + \sin(90-40,583)\sin(90-41)\cos(29-27,55)\\
&= \sin(40,583)\sin(41) + \cos(40,583)\cos(41)\cos(1,45)\\
&= 0,651\cdot 0,656 + 0,759\cdot 0,755\cdot 0,9997\\
&= 0,9999
\end{aligned}$$

olduğunu buluruz. Böylece $k = 0,6823°$ olur. Bu sonucu örneğin deniz miline çevirmek için, 1 derecenin 60 deniz mili olduğunu anımsayarak $k = 40,94$ mil buluruz.

Bu hesabı genel yapacak olursak, dünya üzerinde koordinatları derece olarak verilen $P = (N : n_1^\circ, E : e_1^\circ)$ ve $Q = (N : n_2^\circ, E : e_2^\circ)$ noktaları arasındaki küresel d uzaklığı için ilişki şöyle olur:

$$d = \sin n_1 \sin n_2 + \cos n_1 \cos n_2 \sin(e_1 - e_2).$$

6.2. **Küresel bir üçgende küresel fazlalık hesabı.** Bir KAB üçgeninde $2E$ fazlalığını bulmak için Şekil 10'daki Cesaro komşu üçgeninde sinüs teoremi kullanılabilir. Oradan,

$$\sin E = \frac{\sin \widehat{A} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{k}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$$

olduğunu görürüz. Dolayısıyla, küresel üçgenin üç kenarı ve bir açısı biliniyorsa küresel fazlalığı hesaplayabiliriz.

6.3. **Küresel üçgen alanı.** Vendée Globe yarışmasının 60. gününde 50. güney paralelinin biraz altında yarışı ikinci götüren tekneyle iletişim kesilmiştir. Tekneden son haber alındığı nokta civarında önceki akıntı istatistikleri ve uydu görüntüleri, akıntı hızının saatte 10 deniz mili olduğunu, akıntı yönününse ancak $10°$lik bir hata payıyla saptanabildiğini bildirmektedir. 24 saat sonra bölgeye varan bir Avustralya ordu gemisi, kaç mil karelik bir alanı taramalıdır?

İki kenarından her biri $10 \cdot 24 = 240$ deniz mili, yani 4 derece olan ve bu kenarlar arasındaki açının $10°$ olduğu bir üçgen söz konusu. Bu üçgenin alanını (T_1 olsun) bulmamız gerekiyor.

Küresel bir üçgenin alanı nasıl bulunur? ABC küresel üçgeninde, küre üzerinde A, B, C köşelerine zıt noktalar A', B', C' olsun. Öncelikle, $BCB'C'$ büyük çemberinin A noktasını içine alan yarıküresinin alanı $2\pi r^2$'dir (r yarıçap). Bu yarıkürede $AB'C'$ üçgeninin alanı (T_2 olsun), diğer yarıkürede $A'BC$ üçgeninin alanına eşittir. Dolayısıyla $T_1 + T_2$ toplamı, $ABA'C$ küre *diliminin* alanına eşittir; yani:

$$T_1 + T_2 = 4\pi r^2 \cdot \frac{\widehat{A}}{2\pi} = 2r^2 \widehat{A}.$$

Burada $\widehat{A}$ radyan cinsinden. Aynı zamanda ABC' ve ACB' üçgenlerinin alanlarına sırayla T_3 ve T_4dersek,

$$T_1 + T_3 = 2r^2 \widehat{B} \quad \text{ve } T_1 + T_4 = 2r^2 \widehat{C}$$

yazabiliriz. Bu üç eşitlik sayesinde,

$$\begin{aligned} T_1 &= r^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) - (T_1 + T_2 + T_3 + T_4) \\ &= r^2(2\pi + 2E - 2\pi) \\ &= 2Er^2. \end{aligned}$$

Problemimizde, eğer üçgenin küresel fazlalığı ($2E$) bulunabilirse arama-kurtarma yapılacak alan değeri bulunabilir. Son sinyalin alındığı nokta A köşesi, diğer köşeler B ve C olsun. Bilinenler: $\widehat{A} = 10°, b = 4°, c = 4°$. Bölüm 5.1'deki eşitliği kullanarak $\cos a = \cos 4 \cos 4 + \sin 4 \sin 4 \cos 10 = 0,999926$ buluruz. Şimdi Bölüm 6.2'yi kullanarak küresel fazlalığı bulalım:

$$\sin E = \frac{\sin 10 \sin 2 \sin 2}{0,999926} = 0,00021$$

ve $E = 0,0121° = 0,0021$ radyan olur. Böylece arama/kurtarma çalışmasının yapılacağı alan, $2Er^2 = 0,0042 \cdot 3437,75^2 = 49636$ mil kare çıkar.

Kaynaklar

[1] Chauvenet, W. A treatise on plane and spherical trigonometry, J.B. Lippincott & Co., Philadelphia, 1891.

[2] Donnay, J. D. H. Spherical trigonometry after the Cesàro method, Interscience publishers, New York, 1945.

[3] Smart, W. M. Kürevi astronomi; çeviren Nüzhet T. Gökdoğan, İstanbul Üniversitesi, İstanbul, 1940.